

文章编号: 1000-7598 (2012) 05-1366-10

交通荷载下横观各向同性土的 Biot 固结分析

耿雪玉¹, 于 洁^{1,2}

(1. 青岛理工大学 土木工程学院, 山东 青岛 266033; 2. 青岛易境工程咨询有限公司, 山东 青岛 266000)

摘 要: 在竖向荷载和切向荷载共同作用下, 求解了具有下卧基岩的横观各向同性土的 Biot 固结问题。首先, 基于 Biot 固结理论得到控制方程, 同时引入 3 个状态变量; 然后, 对时间 t 进行 Laplace 变换和对半径 r 进行 Hankel 变换。利用 Laplace-Hankel 联合积分变换求解状态方程, 得到交通荷载作用下横观各向同性土骨架位移、孔隙水压力等的一般积分形式解。结合算例验证了该方法的正确性, 并分析了切向荷载和竖向荷载共同作用下对横观各向同性土层沉降和孔压的影响, 可以发现切向荷载和竖向荷载共同作用所产生的前期沉降明显小于竖向荷载单独作用的情况。为了更好地模拟实际情况, 竖向荷载还采用正弦循环荷载。在循环荷载作用下, 沉降变化周期滞后于荷载周期。

关 键 词: 交通荷载; Biot 固结; Laplace-Hankel 联合积分变换; 横观各向同性

中图分类号: TU 432

文献标识码: A

Biot consolidation of a transversely isotropic soil layer under traffic loading

GENG Xue-yu¹, YU Jie^{1,2}

(1. School of Civil Engineering, Qingdao Technological University, Qingdao, Shandong 266033, China;

2. Qingdao Yijing Consultant Engineering Company, Qingdao, Shandong 266033, China)

Abstract: This paper gives the solutions of the transversely isotropic consolidation under both vertical and tangential traffic loadings. Based on Biot's theory for transversely isotropic clay, the general solutions have been previously derived by applying the Laplace-Hankel transform. By using the inverse Laplace-Hankel transform, pore water pressure and settlement are obtained. The obtained numerical results demonstrate that at the early stage of the consolidation, the tangential loading will have the non-neglectable influence on the settlement. Moreover, the surface settlement under the time-dependent cyclic loading, which is used here to simulate the traffic loadings, always lags behind the loading period.

Key words: traffic loading; Biot consolidation; Laplace-Hankel integral transform; transversely isotropic

1 引 言

近年来, 我国的高速公路和铁路建设得到了迅速发展, 其中大部分的高速公路、铁路都建设在经济发展快速的东部沿海地区和湖泊地区, 这些地区的土层大多都是软黏土, 其物理力学性质差, 具有天然含水率大、强度低和易受扰动影响等特性。高速公路、铁路路面的造价昂贵, 技术标准高, 对路基变形与稳定性的要求十分严格。这些都使得软土地区高速公路以及铁路的路面变形与稳定性控制成为高速公路、铁路路基工程质量控制主要技术难题^[1]。

相对于经典 Terzaghi 固结理论, Biot^[2]于 1941 年得到的“真三维固结理论”的固结方程, 能够更加真实地反映多维情况下各向同性土体孔隙水压力

消散与土骨架变形的相互关系。紧接着, Biot^[3]基于土体与孔隙水之间相互作用的物理特性提出了线弹性材料情况下土体孔隙水相互作用的 Biot 方程。之后, McNamee 等^[4]使用位移函数和重复积分变换获得了平面应变和轴对称固结问题解析解; Booker 等^[5]使用 Laplace 数值变换研究成层土的固结问题。在前人研究的基础上, 许多学者也进行了相关研究。陈胜立等^[6]分析了横观各向同性饱和地基半空间在竖向圆形荷载作用下的轴对称固结问题。Wang 等^[7]用状态空间法求解了非轴对称多层多孔地基 Biot 固结问题。Chen 等^[8]给出了具有下卧基岩的横观各向同性土层在竖向圆形荷载作用下的轴对称固结问题的半解析解。近几年, AI 等^[9-11]提出应用矩阵递法来研究有限层轴对称 Biot 固结, 采用状态空间法

收稿日期: 2010-11-06

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (No. 51009075); 青岛市公共领域科技支撑计划项目 (No. 09-1-1-64-nsh)。

第一作者简介: 耿雪玉, 女, 1980 年生, 博士, 副教授, 主要从事软土动力学以及地基处理等方面的研究工作。E-mail: gengxy@gmail.com

分析了多层土的三维 Biot 固结问题, 随后在孔隙水为可压缩介质的前提下, 应用矩阵传递法求解了多层地基的三维固结问题。耿雪玉等^[12-13]针对复杂荷载作用下, 分析了轴对称饱和半空间均质地基固结问题。Cai 等^[14]对变荷载作用下半无限空间横观各向同性饱和地基表面沉降和孔压进行了数值分析。薛新华等^[15]把双标量损伤模型引入到 Biot 固结有限元中, 并据此编制相应的双标量损伤变量流-固耦合有限元程序。最后, 对一个软土路基有限元简化模型进行分析计算, 并以典型节点为例, 绘制了模型沉降值、孔压值、损伤变量等的变化曲线。

在实际的交通工具运行过程中, 竖向荷载产生的同时, 不可避免地会产生摩擦力等切向荷载, 现有工作大多只是将竖向荷载作用于土体, 没有考虑切向荷载的情况, 这样会导致所得沉降、孔压等结果的可靠性降低。因此, 本文采用竖向和切向荷载相结合的荷载形式, 基于 Biot 固结理论方程, 引入状态变量, 建立相应问题的状态变量微分方程组, 通过 Laplace-Hankel 联合积分变换法, 得到了土骨架位移和孔隙水压力在变化域内的解, 其物理域中的真实解则由相应的逆变换数值给出。应用数值算例分析竖向和切向荷载同时作用时引起的横观各向同性地基在固结过程中沉降和孔压的变化。

2 控制方程

考虑横观各向同性有限土层在半径为 r_0 的竖向圆形和切向荷载作用下的轴对称固结问题。可以令 $r-\theta$ 平面代表各向同性平面, z 轴沿地基深度方向。地基地面分为透水或不透水两种情况, 模型简图如图 1 所示。 q 为竖向荷载, p_r 为切向荷载, h 为土层厚度。在柱坐标系中, 考虑孔隙水可压缩情形下横观各向同性土层的无量纲 Biot 固结方程^[8]。

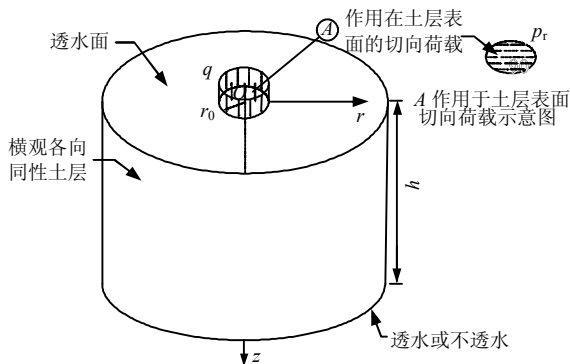


图 1 作用在横观各向同性土层上的圆形荷载和切向荷载
Fig.1 Circular load and tangential load on a transversely isotropic soil layer

平衡方程为

$$\frac{\partial \bar{\sigma}_r}{\partial \bar{r}} + \frac{\partial \bar{\tau}_{rz}}{\partial \bar{z}} + \frac{\bar{\sigma}_r - \bar{\sigma}_\theta}{\bar{r}} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \bar{\sigma}_z}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial \bar{\tau}_{rz}}{\partial \bar{r}} + \frac{\bar{\tau}_{rz}}{\bar{r}} = 0 \quad (2)$$

式中: $\bar{r} = r/r_0$; $\bar{z} = z/r_0$; $\bar{\sigma}_r = \sigma_r/G$, $\bar{\sigma}_\theta = \sigma_\theta/G$, $\bar{\sigma}_z = \sigma_z/G$; $\bar{\tau}_{rz} = \tau_{rz}/G$; σ_r 、 σ_θ 、 σ_z 分别为饱和土体的径向、切向及竖向总应力; G 为土体剪切模量; τ_{rz} 为土体的剪应力; r_0 为荷载作用半径。

本构关系为

$$\bar{\sigma}_r = (2\bar{B}_1 + \bar{B}_2) \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial \bar{r}} + \bar{B}_2 \frac{\bar{u}_r}{\bar{r}} + \bar{B}_3 \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial \bar{z}} - \bar{B}_6 \varepsilon \quad (3)$$

$$\bar{\sigma}_\theta = \bar{B}_2 \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial \bar{r}} + (2\bar{B}_1 + \bar{B}_2) \frac{\bar{u}_r}{\bar{r}} + \bar{B}_3 \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial \bar{z}} - \bar{B}_6 \varepsilon \quad (4)$$

$$\bar{\sigma}_z = \bar{B}_4 \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial \bar{z}} + \bar{B}_3 \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial \bar{r}} + \bar{B}_3 \frac{\bar{u}_r}{\bar{r}} - \bar{B}_1 \varepsilon \quad (5)$$

$$\bar{\tau}_{rz} = \bar{B}_5 \left(\frac{\partial \bar{u}_r}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial \bar{r}} \right) \quad (6)$$

$$\bar{\sigma}_f = \bar{B}_6 \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial \bar{r}} + \bar{B}_6 \frac{\bar{u}_r}{\bar{r}} + \bar{B}_7 \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial \bar{z}} - \bar{B}_8 \varepsilon \quad (7)$$

式中: $\bar{u}_r = u_r/r_0$, $\bar{u}_z = u_z/r_0$, $\bar{B}_j = B_j/G$ ($j=1,2,\dots,8$), B_j ($j=1,2,\dots,8$) 为饱和土介质的弹性常数, 还可由土骨架的 6 个弹性常数 (C_{11} 、 C_{12} 、 C_{13} 、 C_{33} 、 C_{44} 、 C_{66}), 颗粒体积模量 K_s 和孔隙水体积模量 K_f 表示^[7], σ_f 为孔隙水压力; $\varepsilon = \partial w_r / \partial r + w_r / r + \partial w_z / \partial z$; w_r 和 w_z 分别为孔隙水的相对径向和竖向位移, 即 $w_r = f(u_r - u_r)$, $w_z = f(u_z - u_z)$, u_r 和 u_z 分别为径向、纵向孔隙水位移; f 为孔隙率。

渗流连续方程为

$$-\frac{\partial \bar{\sigma}_f}{\partial \bar{r}} = \frac{\partial \bar{w}_r}{\partial \bar{t}} = \bar{Q}_r \quad (8)$$

$$-\bar{\kappa}_z \frac{\partial \bar{\sigma}_f}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial \bar{w}_z}{\partial \bar{t}} = \bar{Q}_z \quad (9)$$

式中: $\bar{w}_z = w_z/r_0$, $\bar{w}_r = w_r/r_0$, $\bar{\sigma}_f = \sigma_f/G$, $\bar{t} = \kappa_r G t / r_0^2$, $\bar{\kappa}_z = \kappa_z / \kappa_r$, $\bar{Q}_r = r_0 Q_r / (\kappa_r G)$, $\bar{Q}_z = r_0 Q_z / (\kappa_r G)$; t 为时间变量; κ_r 和 κ_z 定义为 $\kappa_r = K_r / \gamma_w$ 和 $\kappa_z = K_z / \gamma_w$, K_r 和 K_z 分别为饱和土的径向、竖向渗透系数, γ_w 为水的重度; Q_z 和 Q_r 分别为 z 、 r 方向液体变化量。

将式 (3)、(4)、(6)、(7) 代入式 (1), 式 (5) ~ (7) 代入 (2), 再结合式 (7) ~ (9) 可以得到 3

个以 $\bar{u}_r$ 、 $\bar{u}_z$ 、 $\bar{\sigma}_r$ 为基本变量的横观各向同性饱和土体的固结方程, 对其进行零阶 Laplace-Hankel 联合变换, 经整理写成矩阵形式:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{b_5} & 0 & 0 \\ 0 & b_4 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\kappa}_z \end{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial \bar{z}^2} \begin{Bmatrix} \hat{\bar{e}}_h^0 \\ \hat{\bar{u}}_z^0 \\ \hat{\bar{\sigma}}_r^0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\left(b_3 + \frac{1}{b_5}\right)p^2 & 0 \\ b_3 + \frac{1}{b_5} & 0 & b_7 \\ 0 & b_7 s & 0 \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \begin{Bmatrix} \hat{\bar{e}}_h^0 \\ \hat{\bar{u}}_z^0 \\ \hat{\bar{\sigma}}_r^0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -p^2 b_1 & 0 & -p^2 b_6 \\ 0 & -\frac{p^2}{b_5} & 0 \\ b_6 s & 0 & -b_2 s - p^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{\bar{e}}_h^0 \\ \hat{\bar{u}}_z^0 \\ \hat{\bar{\sigma}}_r^0 \end{Bmatrix} = 0 \quad (10)$$

式中: p 和 s 分别为 r 、 t 在 Laplace-Hankel 联合变换后的参数, $b_1 = 2\bar{B}_1 + \bar{B}_2 - \bar{B}_6^2 / \bar{B}_8$, $b_2 = 1 / \bar{B}_8$, $b_3 = \bar{B}_3 - \bar{B}_6 \bar{B}_7 / \bar{B}_8$, $b_4 = \bar{B}_4 - \bar{B}_7^2 / \bar{B}_8$, $b_5 = 1 / \bar{B}_5$, $b_6 = \bar{B}_6 / \bar{B}_8$, $b_7 = \bar{B}_7 / \bar{B}_8$ 。

考虑 $0 \leq z \leq h$ 区域横观各向同性层状饱和土层, 该土层表面上承受均匀竖向圆形荷载 q 和切向荷载 p_r 。本文竖向圆形荷载采用两种形式: 骤加恒载和正弦循环荷载。骤加恒载在时间 $t=0$ 时施加随后保持恒定, 正弦循环荷载则一直保持振幅不变。因此, 在 $z=0$ 和 $z=h$ 时的边界条件可以写成以下无量纲形式:

$$\bar{\sigma}_z(\bar{r}, 0, \bar{t}) = \left[b_4 \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial \bar{z}} + b_3 e_h + b_7 \bar{\sigma}_r \right]_{\bar{z}=0} = -\bar{q} H(\bar{t}) H(1 - \bar{r}) \quad (11)$$

$$\bar{\tau}_{rz}(\bar{r}, 0, \bar{t}) = \left[\frac{\partial \bar{\tau}_{rz}}{\partial \bar{r}} + \frac{\bar{\tau}_{rz}}{\bar{r}} \right]_{\bar{z}=0} = \left[\frac{1}{b_5} \left(\frac{\partial e_h}{\partial \bar{z}} + \nabla^2 \bar{u}_z \right) \right]_{\bar{z}=0} = \bar{p}_r H(\bar{t}) H(1 - \bar{r}) \quad (12)$$

$$\bar{u}_z(\bar{r}, \bar{h}, \bar{t}) = 0 \quad (13)$$

$$\bar{u}_r(\bar{r}, \bar{h}, \bar{t}) = e_h(\bar{r}, \bar{h}, \bar{t}) = 0 \quad (14)$$

$$\bar{Q}_z(\bar{r}, \bar{h}, \bar{t}) = \left[-\bar{\kappa}_z \frac{\partial \bar{\sigma}_r}{\partial \bar{z}} \right]_{\bar{z}=\bar{h}} = 0 \quad (15)$$

式中: $0 \leq \bar{r} \leq \infty$; $0 \leq \bar{t} \leq +\infty$; $\bar{q} = q/G$, $\bar{p}_r = p_r/G$; $\bar{h} = h/r_0$; $H(\cdot)$ 为 Heaviside 单位阶梯函数。

为了检验排水条件对土固结的影响, 在地基下表面考虑完全透水和不透水两类排水情况。

当地基下表面是完全透水时, 有

$$\bar{\sigma}_r(\bar{r}, \bar{h}, \bar{t}) = 0, 0 \leq \bar{r} \leq \infty, 0 \leq \bar{t} \leq +\infty \quad (16)$$

地基下表面是不透水时, 有

$$\frac{\partial \bar{\sigma}_r}{\partial \bar{z}}(\bar{r}, \bar{h}, \bar{t}) = 0, 0 \leq \bar{r} \leq \infty, 0 \leq \bar{t} \leq +\infty \quad (17)$$

3 控制方程求解

式(10)是关于 $\hat{\bar{e}}_h^0$ 、 $\hat{\bar{u}}_z^0$ 、 $\hat{\bar{\sigma}}_r^0$ 的二阶齐次线性微分方程, 其通解形式可以表示为

$$\begin{Bmatrix} \hat{\bar{e}}_h^0(p, \bar{z}, s) \\ \hat{\bar{u}}_z^0(p, \bar{z}, s) \\ \hat{\bar{\sigma}}_r^0(p, \bar{z}, s) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} h_1(p, s) \\ h_2(p, s) \\ h_3(p, s) \end{Bmatrix} e^{\lambda \bar{z}} \quad (18)$$

将式(18)代入式(10), 可得以下的代数方程来确定系数 h_1 、 h_2 、 h_3 :

$$A_{3 \times 3} \begin{Bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{Bmatrix} = 0 \quad (19)$$

式中: $A_{3 \times 3}$ 为一个 3×3 矩阵, $A_{11} = \frac{1}{b_5} \lambda^2 - p^2 b_1$, $A_{12} =$

$$-\left(b_3 + \frac{1}{b_5}\right) p^2 \lambda, \quad A_{13} = -b_6 p^2, \quad A_{21} = \left(b_3 + \frac{1}{b_5}\right) \lambda,$$

$$A_{22} = b_4 \lambda^2 - \frac{p^2}{b_5}, \quad A_{23} = b_7 \lambda, \quad A_{31} = b_6 s, \quad A_{32} = b_7 s \lambda,$$

$$A_{33} = \bar{\kappa}_z \lambda^2 - b_2 s - p^2.$$

h_1 、 h_2 、 h_3 要有非平凡解, 须有

$$\lambda^6 + m_2 \lambda^4 + m_3 \lambda^2 + m_4 = 0 \quad (20)$$

其中:

$$m_2 = \frac{1}{b_4 \bar{\kappa}_z} \left\{ -b_4 p^2 + 2b_3 \bar{\kappa}_z p^2 + b_3^2 b_5 \bar{\kappa}_z p^2 - b_1 b_4 b_5 \bar{\kappa}_z p^2 - b_7^2 s - b_4 b_2 s \right\} \quad (21)$$

$$m_3 = \frac{1}{b_4 \bar{\kappa}_z} \left\{ -2b_3 p^4 - b_3^2 b_5 p^4 + b_1 b_4 b_5 p^4 + b_1 \bar{\kappa}_z p^4 + b_4 b_5 b_6^2 p^2 s - 2b_6 b_7 p^2 s - 2b_3 b_5 b_6 b_7 p^2 s + b_1 b_5 b_7^2 p^2 s - 2b_3 b_2 p^2 s - b_3^2 b_5 b_2 p^2 s + b_1 b_4 b_5 b_2 p^2 s \right\} \quad (22)$$

$$m_4 = \frac{1}{b_4 \kappa_z} \{-b_1 p^6 - b_6^2 p^4 s - b_1 b_2 p^4 s\} \quad (23)$$

由于 Laplace 逆变换是在复平面 s 内进行, 所以应将式 (20) 视为复系数一元六次方程进行处理, 其 6 个根可表示为

$$\lambda_j (j=1,2,3) = \begin{cases} \lambda_{j1}, & x=y=0 \\ \lambda_{j2}, & x=0, \operatorname{Re}[y]>0 \\ \lambda_{j3}, & \text{其他情况} \end{cases} \quad (24)$$

其中:

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 &= \sqrt{-\frac{m_2}{3}} \\ \lambda_2 &= \sqrt{\left(-\frac{y}{2}-\delta\right)^{\frac{1}{3}} \omega^{j-1} + \frac{-\frac{x}{3}}{\omega^{j-1}\left(-\frac{y}{2}-\delta\right)^{\frac{1}{3}}} - \frac{m_2}{3}} \\ \lambda_3 &= \sqrt{\left(-\frac{y}{2}+\delta\right)^{\frac{1}{3}} \omega^{j-1} + \frac{-\frac{x}{3}}{\omega^{j-1}\left(-\frac{y}{2}+\delta\right)^{\frac{1}{3}}} - \frac{m_2}{3}} \\ \lambda_j (j=4,5,6) &= -\lambda_{j-3} \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

式中: $\delta = \sqrt{\frac{y^2}{4} + \frac{x^3}{27}}$ ($\operatorname{Re}[\delta] \geq 0$) 代表实部为正的一

个单值分支, $\omega = (-1 + \sqrt{3}i)/2$, $\left(-\frac{y}{2} \pm \delta\right)^{\frac{1}{3}}$ 可取 3

次根式的任一单值分支, $y = \frac{2}{27} m_2^3 - \frac{m_2 m_3}{3} + m_4$,

$x = -\frac{m_2^2}{3} + m_3$ 。

式 (19) 的解可以用以下形式表示:

$$\begin{cases} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{cases} = c \times \begin{cases} p^2 (b_4 b_6 p^2 + b_4 b_7 \lambda^2 - b_4^2 b_5 b_6 \lambda^2 + b_3 b_4 b_5 b_7 \lambda^2) \\ \lambda (b_4 b_6 p^2 + b_3 b_4 b_5 b_6 p^2 - b_1 b_4 b_5 b_7 p^2 + b_4 b_7 \lambda^2) \\ -b_1 b_4 p^4 - 2b_3 b_4 p^2 \lambda^2 + b_1 b_4^2 b_5 p^2 \lambda^2 - b_3^2 b_4 b_5 p^2 \lambda^2 - b_4^2 \lambda^2 \end{cases} \quad (26)$$

式中: c 为关于 p 和 s 的任意函数。

根据常微分方程理论, 式 (10) 的解可以写为

$$\begin{Bmatrix} \hat{\varepsilon}_h^0(p, \bar{z}, s) \\ \hat{u}_z^0(p, \bar{z}, s) \\ \hat{\sigma}_r^0(p, \bar{z}, s) \end{Bmatrix} = \sum_{j=1}^3 c_j \begin{Bmatrix} \beta_j \\ -\alpha_j \\ \Delta_j \end{Bmatrix} e^{-\lambda_j \bar{z}} + \sum_{j=1}^3 d_j \begin{Bmatrix} \beta_j \\ \alpha_j \\ \Delta_j \end{Bmatrix} e^{\lambda_j \bar{z}} \quad (27)$$

其中:

$$\alpha_j = \lambda_j (b_4 b_6 p^2 + b_3 b_4 b_5 b_6 p^2 - b_1 b_4 b_5 b_7 p^2 + b_4 b_7 \lambda_j^2) \quad (28)$$

$$\beta_j = p^2 (b_4 b_6 p^2 + b_4 b_7 \lambda_j^2 - b_4^2 b_5 b_6 \lambda_j^2 + b_3 b_4 b_5 b_7 \lambda_j^2) \quad (29)$$

$$\Delta_j = -b_1 b_4 p^4 - 2b_3 b_4 p^2 \lambda_j^2 + b_1 b_4^2 b_5 p^2 \lambda_j^2 - b_3^2 b_4 b_5 p^2 \lambda_j^2 - b_4^2 \lambda_j^2 \quad (30)$$

c_j 和 d_j ($j=1,2,3$) 为 6 个带有 p 和 s 的待定函数, 其可由边界条件确定求出。

对式 (13)~(17) 连同式 (27) 应用零阶 Hankel 变换和 Laplace 变换, 可以将边界条件写成矩阵的形式:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{11} & \mathbf{Q}_{12} \\ \mathbf{Q}_{21} & \mathbf{Q}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -J_1(p) \bar{q} \\ sp \\ J_1(p) \bar{p}_r \\ sp \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (31)$$

其中:

$$\mathbf{Q}_{21} = \begin{bmatrix} -\alpha_1 e^{-\lambda_1 \bar{h}} & -\alpha_2 e^{-\lambda_2 \bar{h}} & -\alpha_3 e^{-\lambda_3 \bar{h}} \\ \beta_1 e^{-\lambda_1 \bar{h}} & \beta_2 e^{-\lambda_2 \bar{h}} & \beta_3 e^{-\lambda_3 \bar{h}} \\ \lambda_1 \Delta_1 e^{-\lambda_1 \bar{h}} & \lambda_2 \Delta_2 e^{-\lambda_2 \bar{h}} & \lambda_3 \Delta_3 e^{-\lambda_3 \bar{h}} \end{bmatrix} \quad (32)$$

$$\mathbf{Q}_{22} = \begin{bmatrix} \alpha_1 e^{\lambda_1 \bar{h}} & \alpha_2 e^{\lambda_2 \bar{h}} & \alpha_3 e^{\lambda_3 \bar{h}} \\ \beta_1 e^{\lambda_1 \bar{h}} & \beta_2 e^{\lambda_2 \bar{h}} & \beta_3 e^{\lambda_3 \bar{h}} \\ -\lambda_1 \Delta_1 e^{\lambda_1 \bar{h}} & -\lambda_2 \Delta_2 e^{\lambda_2 \bar{h}} & -\lambda_3 \Delta_3 e^{\lambda_3 \bar{h}} \end{bmatrix} \quad (33)$$

对于完全透水底面, 有

$$\mathbf{Q}_{11} = \begin{bmatrix} \frac{p^2 \alpha_1 - \lambda_1 \beta_1}{b_5 \lambda_1} & \frac{p^2 \alpha_2 - \lambda_2 \beta_2}{b_5 \lambda_2} & \frac{p^2 \alpha_3 - \lambda_3 \beta_3}{b_5 \lambda_3} \\ \frac{p^2 \alpha_1 - \lambda_1 \beta_1}{b_5} & \frac{p^2 \alpha_2 - \lambda_2 \beta_2}{b_5} & \frac{p^2 \alpha_3 - \lambda_3 \beta_3}{b_5} \\ \Delta_1 & \Delta_2 & \Delta_3 \end{bmatrix} \quad (34)$$

$$\mathbf{Q}_{12} = \begin{bmatrix} \frac{p^2 \alpha_1 - \lambda_1 \beta_1}{b_5 \lambda_1} & \frac{p^2 \alpha_2 - \lambda_2 \beta_2}{b_5 \lambda_2} & \frac{p^2 \alpha_3 - \lambda_3 \beta_3}{b_5 \lambda_3} \\ \frac{\lambda_1 \beta_1 - p^2 \alpha_1}{b_5} & \frac{\lambda_2 \beta_2 - p^2 \alpha_2}{b_5} & \frac{\lambda_3 \beta_3 - p^2 \alpha_3}{b_5} \\ \Delta_1 & \Delta_2 & \Delta_3 \end{bmatrix} \quad (35)$$

同理, 可得到不透水底面的 $\mathbf{Q}_{11}$ 和 $\mathbf{Q}_{12}$ 。

式 (31) 的解为

$$c_i = -\frac{\varphi_{1i}^* J_1(p)}{|\varphi|} \bar{q} + \frac{\varphi_{2i}^* J_1(p)}{|\varphi|} \bar{p}_r, \quad (i=1,2,3) \quad (36)$$

$$d_i = -\frac{\psi_{1i}^* J_1(p)}{|\psi|} \bar{q} + \frac{\psi_{2i}^* J_1(p)}{|\psi|} \bar{p}_r, \quad (i=1,2,3) \quad (37)$$

式中: $\varphi = \mathbf{Q}_{11} - \mathbf{Q}_{12} \mathbf{Q}_{22}^{-1} \mathbf{Q}_{21}$, $\psi = \mathbf{Q}_{12} - \mathbf{Q}_{11} \mathbf{Q}_{21}^{-1} \mathbf{Q}_{22}$; $|\varphi|$ 和 $|\psi|$ 各表示 φ 和 ψ 的行列式的值; φ_{11}^* 、 φ_{12}^* 、 φ_{13}^* 、 φ_{21}^* 、 φ_{22}^* 、 φ_{23}^* 和 ψ_{11}^* 、 ψ_{12}^* 、 ψ_{13}^* 、 ψ_{21}^* 、 ψ_{22}^* 、 ψ_{23}^* 分别为 φ_{11} 、 φ_{12} 、 φ_{13} 、 φ_{21} 、 φ_{22} 、 φ_{23} 和 ψ_{11} 、 ψ_{12} 、 ψ_{13} 、 ψ_{21} 、 ψ_{22} 、 ψ_{23} 的代数余子式。

将上述所求结果进行关于 p 的 Hankel 逆变换和关于 s 的 Laplace 逆变换, 就可以求得各个状态变量在真实物理域内的解, 地基表面的沉降和地基中心孔压消散是两个比较特殊的情况, 可以简写成以下形式:

$$\bar{u}_z(0,0,\bar{r}) = \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \int_0^\infty \begin{Bmatrix} -\alpha_1(c_1-d_1) \\ -\alpha_2(c_2-d_2) \\ -\alpha_3(c_3-d_3) \end{Bmatrix} p e^{s\bar{r}} dp ds \quad (38)$$

$$\bar{\sigma}_r(0,\bar{z},\bar{r}) = \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \int_0^\infty \{ \Delta_1 c_1 e^{-\lambda_1 \bar{z}} + \Delta_1 d_1 e^{\lambda_1 \bar{z}} + \Delta_2 c_2 e^{-\lambda_2 \bar{z}} + \Delta_2 d_2 e^{\lambda_2 \bar{z}} + \Delta_3 c_3 e^{-\lambda_3 \bar{z}} + \Delta_3 d_3 e^{\lambda_3 \bar{z}} \} p e^{s\bar{r}} dp ds \quad (39)$$

考虑切向荷载后, 关于 $\bar{u}_z$ 和 $\bar{\sigma}_r$ 的式 (38)、(39) 在形式上与未考虑切向荷载的公式形式相同, 但 c_i ($i=1,2,3$) 和 d_i ($i=1,2,3$) 的取值不同。其中, 有切向荷载的 c_i ($i=1,2,3$) 和 d_i ($i=1,2,3$) 按式 (36)、(37) 取值, 即存在切向荷载项 $\bar{p}_r$ 。而无切向荷载的 c_i ($i=1,2,3$) 和 d_i ($i=1,2,3$) 仅有关于竖向荷载 $\bar{q}$ 的公式项。

4 常见荷载及其 Laplace 变换式

采用竖向和切向荷载相结合的荷载形式。为了更符合实际情况, 竖向荷载不仅采用骤加恒载的形式, 还要采用正弦循环荷载。切向荷载始终采用恒载的形式。

4.1 骤加恒载

所加荷载如图 2(a)所示, 且有

$$\bar{q}(\bar{r}) = \bar{q}_0, \quad \bar{r} > 0 \quad (40)$$

其 Laplace 变换式为

$$\hat{Q}(S) = \bar{q}_0 / S \quad (41)$$

4.2 循环荷载

所加荷载如图 2(b)所示, 且有

$$\bar{q}(\bar{r}) = \bar{q}_0 \left[1 + \sin(\pi \bar{r} / \bar{t}_0) \right] / 2 \quad (42)$$

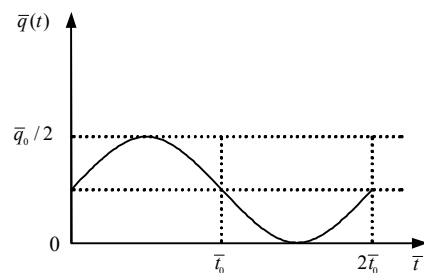
其 Laplace 变换式为

$$\hat{Q}(S) = \frac{\bar{q}_0}{2} \left[\frac{1}{S} + \frac{\pi \bar{t}_0}{\pi^2 + \bar{t}_0^2 S^2} \right] \quad (43)$$

式中: $\bar{q}_0 = 1$, 在模拟沉降时 $\bar{t}_0 = 0.5$, 模拟孔压时 $\bar{t}_0 = 0.1$ 。



(a) 骤加恒载



(b) 正弦荷载

图 2 荷载简图

Fig.2 Loading cases

5 算例分析

为了获得时域内的解, 分别对变量 t 和 r 进行 Laplace 逆变换和 Hankel 逆变换。对于 Laplace 逆变换, 本文采用 Durbin^[16]所提出的计算方法。

为了证明本文方法的正确性和合理性, 对有限横观各向同性土层固结进行了数值计算, 并与已发表论文的计算结果 (McNamee^[4], Booker^[5], 陈胜立^[8]等) 进行对比, 分别对半无限空间土体和有限

土层土体两种情况进行拟合。图 3~5 中半无限空间土体计算参数为: $\bar{C}_{11} = C_{11}/G = 2$, $\bar{C}_{33} = C_{33}/G = 2.001$, $\bar{C}_{12} = C_{12}/G = 0$, $\bar{C}_{13} = C_{13}/G = 0$, $\bar{C}_{44} = C_{44}/G = 1$, $\bar{C}_{66} = C_{66}/G = 1$, $\nu = 0$, $K_f = \infty$, $K_s = \infty$, $\kappa_r = \kappa_z = \kappa$, $\bar{h} = 100$ (此厚度已经足够接近于半空间)。有限土层土体计算参数为: $\bar{C}_{11} = 3.5$, $\bar{C}_{33} = 3.501$, $\bar{C}_{12} = 1.5$, $\bar{C}_{13} = 1.5$, $\bar{C}_{44} = 1$, $\bar{C}_{66} = 1$, $\nu = 0.3$, $K_f = \infty$, $K_s = \infty$, $\kappa_r = \kappa_z = \kappa$, $\bar{h} = 1$ 。

图 3 为圆形竖向恒载单独作用下横观各向同性地基表面中心处的沉降曲线。为分析方便, 纵坐标采用无量纲参数 $G\bar{u}_z/q$, 横坐标采用无量纲时间参数 $\bar{t}$, 且 $\bar{t} = \kappa_r G t / r_0^2$ 。图 4 为圆形竖向恒载单独作用下横观各向同性地基表面中心处的孔压随时间消散曲线。为分析方便, 纵坐标采用无量纲参数 $\frac{\bar{\sigma}_f(0, \bar{z}, \bar{t})}{\bar{\sigma}_f(0, \bar{z}, 0)}$, 横坐标采用无量纲时间参数 $\bar{t}$ 。由图可见, 本文方法所得结果与文献[4-5, 8]的结果较吻合, 从而证明本文计算方法的合理性和有效性。

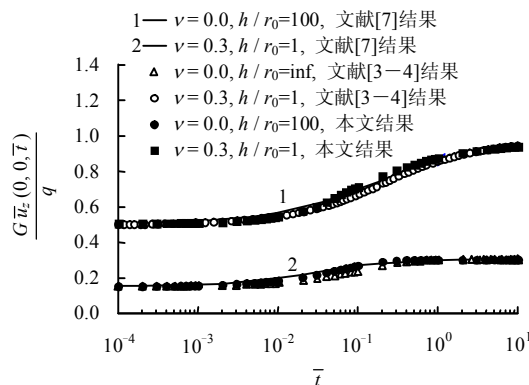


图 3 圆形竖向荷载作用下横观各向同性地基表面中心处的沉降

Fig.3 Surface settlements at center of circle with vertical loading only for isotropic soil layer

从图 4 恒载单独作用下孔压消散曲线还能明显看出 Mandel-Cryer 效应, 即离排水边界越远, Mandel-Cryer 效应出现的时间越晚, 效应越明显; 离排水边界越近, 孔隙水压力消散越快。

图 5 是圆形竖向恒载单独作用下与圆形竖向恒载和切向荷载共同作用下横观各向同性地基表面中心处沉降的对比曲线。图中显示, 切向荷载对初期沉降影响较大, $\bar{t} < 0.2$ 加切向荷载的沉降曲线明显小于无切向荷载的沉降曲线, 从 $\bar{t} = 0.2$ 开始, 切向荷载的沉降与无切向荷载的沉降曲线趋于平缓。可以看出, 在下卧基岩处加切向荷载后的初期沉降值明显小于圆形竖向荷载单独作用的情况。

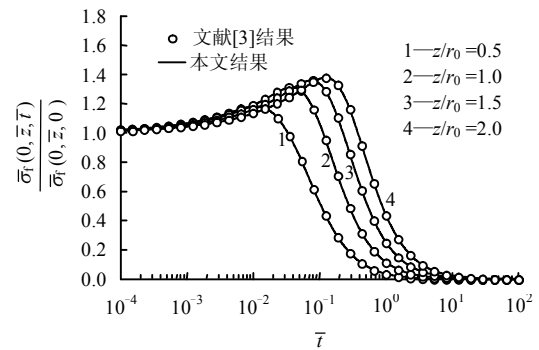


图 4 圆形竖向荷载作用下横观各向同性地基表面中心处的孔压

Fig.4 Pore pressure histories at center of circle with vertical loading only for isotropic soil layer

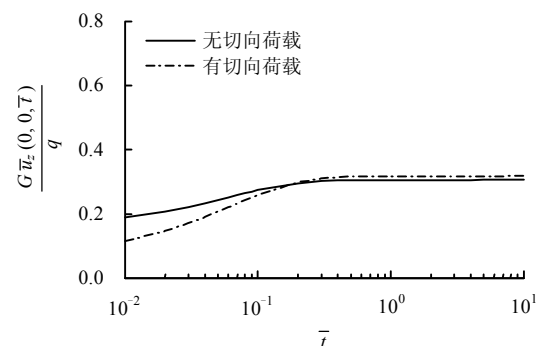


图 5 切向荷载对横观各向同性下卧基岩地基表面中心处沉降的影响

Fig.5 Influences of tangential loading on surface settlement at center for isotropic soil

为了分析不同情况下横观各向同性下卧基岩地基表面中心沉降的变化。本节给出的数值算例所采用的土体参数为: $E = 116 \text{ MPa}$, $G = 45 \text{ MPa}$, $K_s = 37.9 \text{ MPa}$, $K_f = 2.1 \text{ GPa}$, $\bar{\kappa}_z = 0.5$, $\nu = 0.29$, $f = 0.4$, $E'/E = 0.74$, $\nu'/\nu = 0.66$, $G'/G = 0.67$ 。

图 6 是正弦循环荷载单独作用与正弦循环荷载和切向荷载共同作用下, 土层厚度对横观各向同性地基表面中心处沉降变化的对比曲线。无量纲化荷载周期为 1。图 6 显示, 对于循环荷载来说, 其震荡幅度的大小与 $\bar{h}$ 成正比, 随着 $\bar{h}$ 的增大, 沉降幅度增大。 $\bar{h}$ 相同时, 沉降变化幅度不随时间和荷载而发生任何改变。有切向荷载的沉降曲线初始值都明显小于无切向荷载的沉降初始值, 此特点与图 5 相吻合。

图 7 是在下卧基岩处, 相同的圆形竖向荷载和不同的切向荷载共同作用下横观各向同性地基表面中心处沉降的对比曲线。随着 $\bar{p}_r$ 的增大, 相同时间段内沉降的变化幅度越大, 即最初沉降值越小, 最终沉降值越大。不论 $\bar{p}_r$ 如何变化, 从 $\bar{t} = 0.7$ 开始, 沉降曲线都开始趋于平缓。可以表明, 在同一时间

段内, $\bar{p}_r$ 越大, 对横观各向同性地基表面中心处沉降的影响越大。

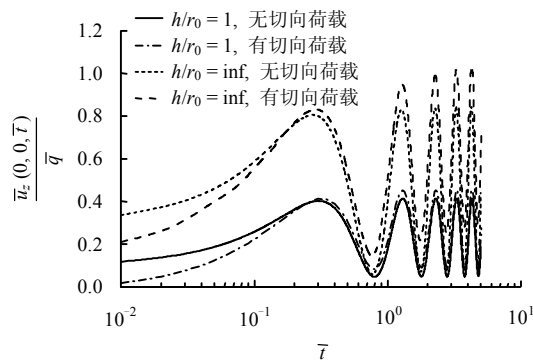


图6 循环荷载作用下横观各向同性地基表面中心处沉降

Fig.6 Surface settlements at center of a transversely isotropic soil layer under cyclic loading

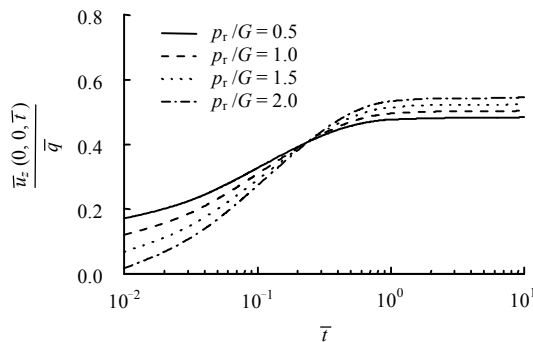


图7 不同切向荷载与骤加恒载作用下对横观各向同性地基表面中心处沉降的影响

Fig.7 Influences of different $\bar{p}_r$ with constant loading on surface settlement at center line for isotropic soil layer

图8是在下卧基岩处, 相同的正弦循环荷载和不同的切向荷载共同作用下横观各向同性地基表面中心处沉降的对比曲线。无量纲化荷载周期为1。随着 $\bar{p}_r$ 的增大, 沉降的初始值减小, 沉降曲线的震动幅度不变, 这与图6所得结果一致。

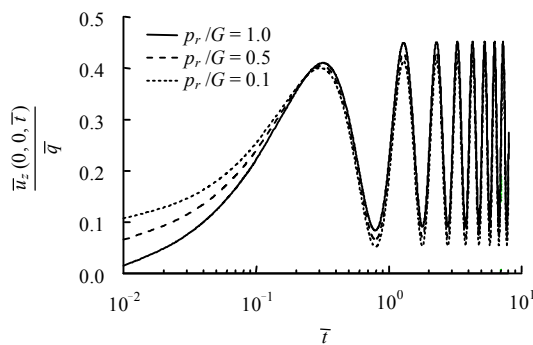


图8 不同切向荷载与正弦循环荷载作用下对横观各向同性地基表面中心处沉降的影响

Fig.8 Influences of different $\bar{p}_r$ with cyclic loading on surface settlement at center for isotropic soil layer

图9、10是地基地面排水条件不同时, 圆形竖向恒载和切向荷载共同作用下, 地基厚度变化对横观各向同性地基表面中心处沉降变化的影响。为方便比较, 图中还给出了半空间饱和地基的沉降变化曲线。由图可见, 地基厚度对横观各向同性土体的沉降有明显影响, 随着土层厚度增加和 $\bar{h}$ 增大, 沉降曲线上移, 沉降趋于稳定所需时间越长。然而, 地基地面完全透水的沉降初始值和最终值都大于地基地面不透水的情况。从图中也可以看出, 地基地面完全透水的沉降幅度要大于地基地面不透水的情况。当 $\bar{h} = 20$ 时, 横观各向同性地基中心处沉降已经非常接近饱和半空间地基的解。

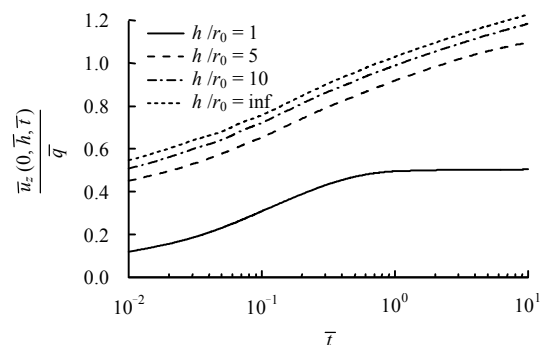


图9 完全透水底面土层厚度对横观各向同性地基表面中心处沉降的影响

Fig.9 Effects of layer thickness on surface settlement at center of an isotropic soil layer with a pervious boundary condition

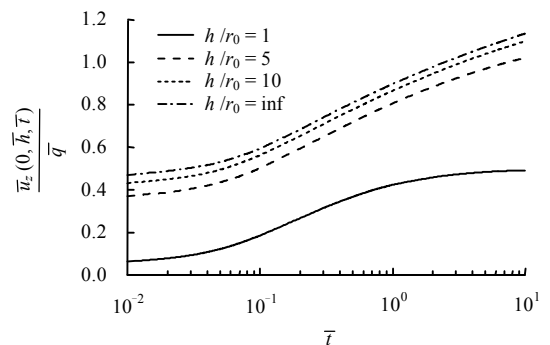


图10 不透水底面土层厚度对横观各向同性地基表面中心处沉降的影响

Fig.10 Effects of layer thickness on surface settlement at center of an isotropic soil layer with an impervious boundary condition

图11是在下卧基岩处, 相同的圆形竖向恒载和不同的切向荷载共同作用下横观各向同性地基表面中心处孔压的对比曲线。无切向荷载的孔压初始值明显小于有切向荷载的孔压初始值。为分析方便, 纵坐标采用无量纲参数 $\bar{\sigma}_r/\bar{q}$, 横坐标采用无量纲时间参数 $\bar{t}$ 。随着 $\bar{p}_r$ 增大, 相同时间段内孔压的变

化幅度加大, 即最初孔压值越大, 孔压消散速度越快, 在同一时间点消散完成。不论 $\bar{p}_r$ 如何变化, Mandel-Cryer 效应出现的时间相同。可以表明, $\bar{p}_r$ 越大, 对横观各向同性地基表面中心初始孔压值的影响越大, 然而对 Mandel-Cryer 效应出现的时间无影响。

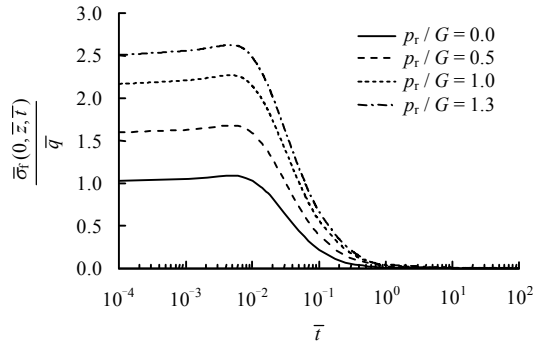


图 11 不同切向荷载与骤加恒载作用下对横观各向同性地基表面中心处孔压的影响

Fig.11 Influences of different $\bar{p}_r$ with constant loading on pore pressure at center line for isotropic soil layer

图 12 是在下卧基岩处, 相同的正弦循环荷载和不同的切向荷载共同作用下横观各向同性地基表面中心处孔压的对比曲线。无量纲化荷载周期为 0.2。由于土体始终处于加载、卸载过程, 从而超静孔压的产生和消散重复交替进行。无切向荷载的孔压曲线振幅与有切向荷载的孔压曲线振幅相同。无切向荷载的孔压初始值也明显小于有切向荷载的孔压初始值。随着 $\bar{p}_r$ 增大, 孔压初始值增大, 振幅保持不变。荷载施加于土体上时, 孔隙水不会马上排出, 土体存在一个反弹过程, 因而黏性土的排水固结过程具有时间上的滞后性, 导致地面沉降也具有滞后效应, 孔压曲线变化周期滞后于外加荷载周期。

为分析现实情况下横观各向同性下卧基岩地基表面中心处沉降的变化。以下数值算例所采用土体参数为: $E = 10.8 \text{ MPa}$, $G = 3.0 \text{ MPa}$, $K_s = 37.9 \text{ GPa}$, $K_f = 2.1 \text{ GPa}$, $\bar{\kappa}_z = 0.5$, $\nu = 0.29$, $f = 0.4$, $E'/E = 0.74$, $\nu'/\nu = 0.66$, $G'/G = 0.67$, $\bar{q} = q/G = 1$ 。由于 p_r 的大小与载荷、内压、胎面花纹、胎面橡胶性质、轮胎结构、接地压力分布、速度、温度、道路材料、路面污染、湿润、水膜厚度等多种因素有关, 文献[17—18]为了量测车轮与路面之间的相互作用力做过大量试验, 从中观察到, 汽车无论是在制动、启动、加速或者减速行驶的情况下, 水平剪切力 p_r 和垂直力 q 之间存在一定的比值关系。比如, p_r 在车正常启动时, 为 q 的 0.1~0.2 倍; p_r 在车启动较快时, 为 q 的 0.3~0.4 倍; p_r 在一般制动情况下,

为 q 的 0.5~0.7 倍; p_r 在紧急刹车时, 可达到 q 的 0.7~1.0 倍。所以本算例根据以上所述取 p_r/G 的范围为 0.1~1.0。

图 13、14 分别在汽车产生的切向荷载和骤加恒载的作用下, 得到的横观各向同性地基表面中心处沉降和孔压的对比曲线。

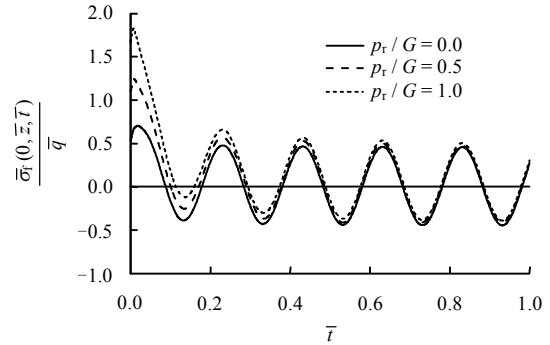


图 12 不同切向荷载与正弦循环荷载作用下对横观各向同性地基表面中心处孔压的影响

Fig.12 Influences of different $\bar{p}_r$ with cyclic loading on pore pressure at center for isotropic soil layer

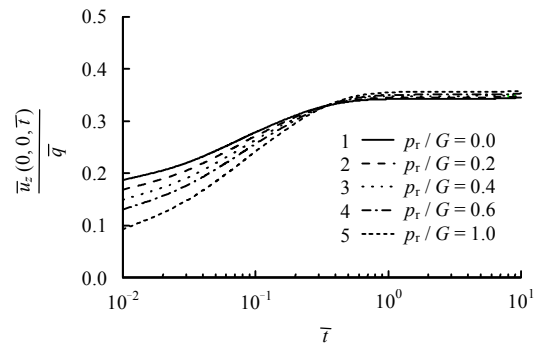


图 13 汽车产生的切向荷载与骤加恒载作用下对横观各向同性地基表面中心处沉降的影响

Fig.13 Influences of different $\bar{p}_r$ induced by cars with constant loading on surface settlement at center line for isotropic soil layer

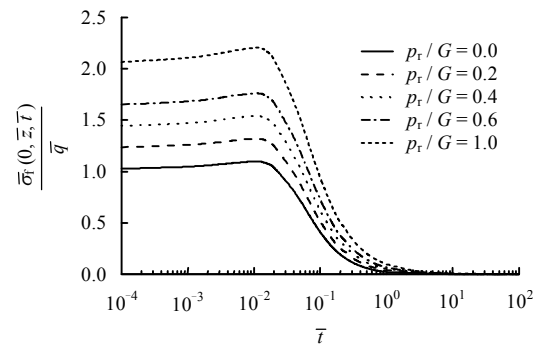


图 14 汽车产生的切向荷载与骤加恒载作用下对横观各向同性地基表面中心处孔压的影响

Fig.14 Influences of different $\bar{p}_r$ induced by cars with constant loading on pore pressure at center line for isotropic soil layer

从图中可以看出,汽车不论是在启动、制动或者刹车情况下,在速度发生变化的很短时间内,沉降和孔压相较于不考虑切向荷载情况都会发生较大的变化。其中,紧急刹车对初始沉降和孔压的影响最大。因此,在汽车启动、制动或刹车作用下,很有必要考虑水平切向荷载作用。而在汽车匀速行驶作用下,地表水平切向荷载作用对初始沉降以及孔压影响并不明显。

5 结 论

基于交通荷载形式的实际情况,本文采用竖向和切向荷载相结合的形式,从横观各向同性饱和地基的 Biot 固结方程出发,引入状态变量,建立相应问题的状态变量微分方程组,通过 Laplace-Hankel 联合积分变换法,得到了横观各向同性饱和地基在圆形竖向荷载和切向荷载共同作用下 Biot 固结问题的解析解。通过算例分析表明:

(1) 在圆形竖向恒载作用的同时,有无切向荷载对沉降变化的影响显而易见,有切向荷载的前期沉降较无切向荷载的起始沉降要小很多,随后两种情况同时趋于稳定。由此可见,有切向荷载的初期沉降值明显要小于无切向荷载的情况。此规律在恒载和正弦循环荷载作用下都得到证实。

(2) 在圆形竖向正弦循环荷载作用的同时,无论有无切向荷载,都会发现沉降曲线的震荡幅度与 $\bar{h}$ 成正比,随着 $\bar{h}$ 的增大,沉降的振幅增大,沉降变化幅度不随时间而发生任何改变。在下卧基岩处,随着切向荷载增大,沉降初始值减小,振幅保持不变。

(3) 在下卧基岩,圆形竖向恒载和不同的切向荷载共同作用时,随着切向荷载增大,沉降起始点会越小,最终沉降值会越大,但会在同一时间点处趋于稳定。

(4) 在圆形竖向恒载和切向荷载共同作用下,地基地面排水条件不同时,随着土层厚度增加,沉降曲线上移,但沉降趋于稳定的时间会延后。当地基地面是完全透水时,沉降幅值要大于地基地面不透水的情况。

(5) 从竖向恒载单独作用下孔压消散曲线能明显看出 Mandel-Cryer 效应。离排水边界越远, Mandel-Cryer 效应出现的时间越晚,效应越明显;离排水边界越近,孔隙水压力消散越快。

(6) 在竖向恒载和切向荷载共同作用下,无切向荷载的孔压初始值明显小于有切向荷载的孔压初始值,随着 $\bar{p}_r$ 增大,孔压初始值增大,消散速度变

快,但对 Mandel-Cryer 效应出现的时间无影响。在竖向正弦循环荷载和切向荷载共同作用下,也会出现无切向荷载的孔压初始值明显小于有切向荷载的孔压初始值的现象,随着 $\bar{p}_r$ 的增大,孔压曲线的震荡幅度不变,孔压初始值越大。孔压变化周期滞后于外加荷载周期。

(7) 分析现实情况下横观各向同性下卧基岩地基表面中心处沉降和孔压的变化时, p_r/G 取值范围为 0.1~1.0。汽车不论是在启动、制动或者刹车的情况下,在速度发生变化的很短时间内,沉降和孔压相较不考虑切向荷载情况都会发生较大的变化。

参 考 文 献

- [1] 蔡袁强, 王玉, 曹志刚, 等. 列车运行时由轨道不平顺引起的地基振动研究[J]. 岩土力学, 2012, 33(2): 327—335.
CAI Yuan-qiang, WANG Yu, CAO Zhi-gang, et al. Study of ground vibration from trains caused by track irregularities[J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2012, 33(2): 327—335.
- [2] BIOT M A. General theory of three-dimensional consolidation[J]. *Journal of Applied Physics*, 1941, 12(2): 155—164.
- [3] BIOT M A. Theory of elasticity and consolidation for a porous anisotropic solid[J]. *Journal of Applied Physics*, 1955, 28(2): 182—185.
- [4] MCNAMEE J, GIBSON R E. Plane strain and axially symmetric problems of the consolidation of a semi-infinite clay stratum[J]. *Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, 1960, 13(2): 210—227.
- [5] BOOKER J R, SMALL J C. A method of computing the consolidation behaviour of layered soils using direct numerical inversion of Laplace transforms[J]. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 1987, 11(4): 363—380.
- [6] 陈胜立, 张建民. 横观各向同性饱和地基轴对称 Biot 固结问题的解析解[J]. 岩土工程学报, 2002, 24(1): 26—30.
CHEN Sheng-li, ZHANG Jian-min. An analysis of axisymmetric consolidation for transversely isotropic saturated soils[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2002, 24(1): 26—30.

- [7] WANG J G, FANG S S. State space solution of non-axisymmetric Biot consolidation problem for multilayered porous media[J]. **International Journal of Engineering Science**, 2003, 41(15): 1799—1813.
- [8] CHEN S L, ZHANG L M, CHEN L Z. Consolidation of a finite transversely isotropic soil layer on a rough impervious base[J]. **Journal of Engineering Mechanics**, 2005, 131(12): 1279—1290.
- [9] AI Z Y, WANG Q S. A new analytical solution to axisymmetric Biot's consolidation of a finite soil layer[J]. **Applied Mathematics and Mechanics**, 2008, 29(12): 1617—1624.
- [10] AI Z Y, CHENG Z Y, HAN J. State space solution to three-dimensional consolidation of multi-layered soils[J]. **International Journal of Engineering Science**, 2008, 46(5): 486—498.
- [11] AI Z Y, WU C, HAN J. Transfer matrix solutions for three-dimensional consolidation of a multi-layered soil with compressible constituents[J]. **International Journal of Engineering Science**, 2008, 46(11): 1111—1119.
- [12] 耿雪玉. 复杂条件下软黏土地基多维固结分析[博士学位论文 D]. 杭州: 浙江大学, 2008.
- [13] 耿雪玉, 蔡袁强. 变荷载作用下轴对称饱和半空间均质地基 Biot 固结分析[J]. **岩土力学**, 2009, 30(8): 2264—2270.
- GENG Xue-yu, CAI Yuan-qian. Axisymmetric Biot consolidation of a semi-infinite isotropic saturated soil subjected to time-dependent loadings[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2009, 30(8): 2264—2270.
- [14] CAI Y Q, GENG X Y. Consolidation analysis of a semi-infinite transversely isotropic saturated soil under general time-varying loadings[J]. **Computers and Geotechnics**, 2009, 36(3): 484—492.
- [15] 薛新华, 张我华. 双标量损伤模型及其在 Biot 固结有限元中的应用[J]. **岩土力学**, 2010, 31(1): 24—30.
- XUE Xin-hua, ZHANG Wo-hua. Double scalar variables damage model and its application to Biot's consolidation FEM[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2010, 31(1): 24—30.
- [16] DURBIN F. Numerical inversion of Laplace transform: an efficient improvement to Dubner and Abita's method[J]. **The Computer Journal**, 1974, 19(9): 371—376.
- [17] 张起森. 道路工程有限元分析法[M]. 北京: 人民交通出版社, 1983.
- [18] 张培森. 车辆荷载作用下沥青路面结构应力分析[硕士学位论文 D]. 西安: 长安大学, 2007.